解析学 II　解答例

2015.06.22

■　M を自然数，λ を正数とし，$(M+1)\times(M+1)$ 行列 $B=(b_{k\ell})$ を

$$b_{k\ell}=\begin{cases}1+2\,\lambda & (|\,k-\ell\,|=0)\\ -\lambda & (|\,k-\ell\,|=1)\\ 0 & (|\,k-\ell\,|\geq 2)\end{cases}$$

により定義する．任意の $(M+1)$ 次元実ベクトル $\mathbf{x}=(x_k)$ に対して，(1) $\mathbf{x}^T\,B\,\mathbf{x}$ を簡単にし，(2) $\mathbf{x}^T\,B\,\mathbf{x}\geq 0$ を示せ．

(解)　相加平均・相乗平均により

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T\,B\,\mathbf{x}=&(x_1,x_2,\cdots,x_{M+1})\begin{pmatrix} & (1+2\,\lambda)\,x_1 & -\lambda\,x_2\\ -\lambda\,x_1+ & (1+2\,\lambda)\,x_2 & -\lambda\,x_3\\ -\lambda\,x_2+ & (1+2\,\lambda)\,x_3 & -\lambda\,x_4\\ \vdots & & \\ -\lambda\,x_{M-1}+ & (1+2\,\lambda)\,x_M & -\lambda\,x_{M+1}\\ -\lambda\,x_M+ & (1+2\,\lambda)\,x_{M+1} & \end{pmatrix}\\ =&-\lambda\sum_{k=2}^{M+1}x_k\,x_{k-1}+(1+2\,\lambda)\sum_{k=1}^{M+1}x_k^2-\lambda\sum_{k=1}^{M}x_k\,x_{k+1}\\ =&(1+2\,\lambda)\sum_{k=1}^{M+1}x_k^2-2\,\lambda\sum_{k=1}^{M}x_k\,x_{k+1}\geq(1+2\,\lambda)\sum_{k=1}^{M+1}x_k^2-2\,\lambda\sum_{k=1}^{M}|\,x_k\,|\,|\,x_{k+1}\,|\\ \geq&(1+2\,\lambda)\sum_{k=1}^{M+1}x_k^2-2\,\lambda\sum_{k=1}^{M}\frac{x_k^2+x_{k+1}^2}{2}=(1+\lambda)\,x_1^2+\sum_{k=2}^{M}x_k^2+(1+\lambda)\,x_{M+1}^2\geq 0\end{aligned}$$

が得られる．■