解析学 II　解答例

2015.06.29

■　正数 d，h，L は与えられているとし，自然数 $M \geq 2$ は任意とする．$0 < m < M$ をみたす整数 m に対して λ_m を

$$\lambda_m = 2\,\lambda\,\cos\frac{\pi\,m}{M} + 1 - 2\,\lambda, \qquad \lambda = \frac{d\,h}{k^2}, \qquad k = \frac{L}{M}$$

で定めるとき，(1) $m < m'$ ならば $\lambda_m > \lambda_{m'}$ であることを示し，(2) 与えられた d，h，L，m に対して極限 $\lim_{M\to\infty}\lambda_m$ を調べよ．

(解)　(1) $\lambda > 0$ であり，$0 < m < m' < M$ のとき

$$0 < \frac{\pi\,(m'-m)}{2\,M} < \frac{\pi\,(m'+m)}{2\,M} < \pi$$

であることに注意すると，和積公式より

$$\frac{\lambda_{m'} - \lambda_m}{2\,\lambda} = \cos\frac{\pi\,m'}{M} - \cos\frac{\pi\,m}{M} = -2\,\sin\frac{\pi\,(m'+m)}{2\,M}\,\sin\frac{\pi\,(m'-m)}{2\,M} < 0$$

であるから，$\lambda_{m'} < \lambda_m$ である．

(2) λ_m を M を用いて表すと

$$\lambda_m = 1 - 2\,\lambda\left(1 - \cos\frac{\pi\,m}{M}\right) = 1 - 4\,\lambda\,\sin^2\frac{\pi\,m}{2\,M} = 1 - \frac{4\,M^2\,d\,h}{L^2}\,\sin^2\frac{\pi\,m}{2\,M}$$

であるから，$x = (\pi\,m)/(2\,M)$ とおくと，

$$\lim_{M\to\infty}\lambda_m = \lim_{x\to 0}\left\{1 - \frac{\pi^2\,d\,h\,m^2}{L^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\} = 1 - \frac{\pi^2\,d\,h\,m^2}{L^2}$$

となる．■