解析学 II　解答例

2015.07.06

■　ガンマ関数 $\Gamma(z)$ を

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

で，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して I_n を

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

で定義するとき，n と $\Gamma(z)$ を用いて I_n （$n \in \mathbb{N}$）を表せ．ここで，$\Gamma(1) = 1$，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$，すべての $z > 0$ に対して $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ であることは証明なしに用いても良い．

(解)　ガンマ関数 $\Gamma(z)$ の性質により，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1/2) =& \left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\dots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
=& \frac{(2\,n-1)\cdot(2\,n-3)\cdot\dots\cdot 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}}{2^n}, \\
\Gamma(n+1) =& n! = \frac{(2\,n)\cdot(2\,n-2)\cdot\dots\cdot 4\cdot 2}{2^n}
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意したい．$I_0 = \pi/2$，$I_1 = 1$ であり，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，部分積分法により

$$\begin{aligned}
I_{n+2} =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,(-\cos x)'\, dx = \left[\sin^{n+1} x\,(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(n+1)\,\sin^n x\,\cos x\}\,(-\cos x)\, dx \\
=& (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,(1-\sin^2 x)\, dx = (n+1)\,(I_n - I_{n+2}), \qquad \text{つまり，}\quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n
\end{aligned}$$

が得られる．(i) $n = 2\,m$ （$m \in \mathbb{N}$）のとき

$$I_n = \frac{2\,m-1}{2\,m}\cdot\frac{2\,m-3}{2\,m-2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot(2\,m)}\cdot\frac{2^m\,\Gamma(m+1/2)}{2^{m-1}\,\Gamma(m)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+1)/2)}{n\,\Gamma(n/2)}$$

と表され，(ii) $n = 2\,m-1$ （$m \in \mathbb{N}$）のとき

$$I_n = \frac{2\,m-2}{2\,m-1}\cdot\frac{2\,m-4}{2\,m-3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,m-1}\cdot\frac{2^{m-1}\,\Gamma(m)}{2^{m-1}\,\Gamma(m-1+1/2)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+1)/2)}{n\,\Gamma(n/2)}$$

と表さる．したがって，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+1)/2)}{n\,\Gamma(n/2)}$$

となる．■