解析学概論　解答例

2015.04.13

■　n を自然数とするとき，命題「n^2 が 2 で整除されるならば，n も 2 で整除される」が成り立つことを，次の証明方法でそれぞれ示せ．

(1) 対偶による方法

(2) 背理法

(解) (1) 条件命題とその対偶命題の真偽は一致するので，対偶命題「n が 2 で整除されないならば，n^2 も 2 で整除されない」が成り立つことを示す．n は 2 で整除されないので，ある自然数 k が取れて，$n = 2\,k - 1$ と表せるので，

$$n^2 = (2\,k - 1)^2 = 2\,(2\,k^2 - 2\,k) + 1$$

となり，n^2 は 2 で整除されない．示すべき命題の対偶命題が成り立つので，示すべき命題が成り立つ．

(2) 示すべき命題の否定を取って，n^2 は 2 で整除され，かつ，n は 2 で整除されないと仮定する．n は 2 で整除されないので，ある自然数 k が取れて，$n = 2\,k - 1$ と表せるので，

$$n^2 = (2\,k - 1)^2 = 2\,(2\,k^2 - 2\,k) + 1$$

となり，n^2 は 2 で整除されない．これは n^2 が 2 で整除されることに反する．したがって，示すべき命題が成り立つ．■