解析学概論　解答例

2015.04.20

■　$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A_2，B_2，A_3，B_3 を

$$A_2 = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\,\}, \qquad B_2 = \{\,(x,y)\,|\,|\,x\,|^2+|\,y\,|^2 \le 1\,\},$$
$$A_3 = \{\,(x,y)\,|\,x^3+y^3 \le 1\,\}, \qquad B_3 = \{\,(x,y)\,|\,|\,x\,|^3+|\,y\,|^3 \le 1\,\}$$

により定めるとき，それらの包含関係を調べよ．

（解） (1) すべての (x,y) に対して $x^2+y^2=|\,x\,|^2+|\,y\,|^2$ であるから，$A_2=B_2$ である．(2) $(x,y)\in B_2$ を任意にとる．

$$|\,x\,|^2 \le |\,x\,|^2+|\,y\,|^2 \le 1, \qquad |\,y\,|^2 \le |\,x\,|^2+|\,y\,|^2 \le 1$$

より $|\,x\,|\le 1$，$|\,y\,|\le 1$ であるから，

$$|\,x\,|^3+|\,y\,|^3 \le |\,x\,|\cdot|\,x\,|^2+|\,y\,|\cdot|\,y\,|^2 \le |\,x\,|^2+|\,y\,|^2 \le 1$$

となり，$(x,y)\in B_3$ である．したがって，$B_2\subset B_3$ が成り立つ．(3) すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $-|\,x\,|\le x\le |\,x\,|$ であることに注意したい．任意の $(x,y)\in B_3$ に対して，

$$x^3+y^3 = x\cdot|\,x\,|^2+y\cdot|\,y\,|^2 \le |\,x\,|\cdot|\,x\,|^2+|\,y\,|\cdot|\,y\,|^2 = |\,x\,|^3+|\,y\,|^3 \le 1$$

となり，$(x,y)\in A_3$ である．したがって，$B_3\subset A_3$ が成り立つ．以上から，$A_2=B_2\subset B_3\subset A_3$ である．■