解析学概論　解答例

2015.05.07

■　X，Y を集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．このとき，次が成り立つことを示せ．

(1) Y の任意の部分集合 B_1，B_2 に対して $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ である．

(2) X の任意の部分集合 A に対して $A \subset f^{-1}(f(A))$ である．

(3) Y の任意の部分集合 B に対して $f(f^{-1}(B)) \subset B$ である．

(解)　(1) 任意の $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ に対して，逆像の定義より $f(x) \in B_1 \cup B_2$ であるから，$f(x) \in B_k$ をみたす $k \in \{1, 2\}$ が取れ，$x \in f^{-1}(B_k) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ が成り立つ．したがって，$f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ である．

(2) 任意の $x \in A$ に対して，$f(x) \in f(A)$ と逆像の定義より $x \in f^{-1}(f(A))$ が成り立つ．したがって，$A \subset f^{-1}(f(A))$ である．

(3) 任意の $y \in f(f^{-1}(B))$ に対して，ある $x \in f^{-1}(B)$ が取れて $y = f(x)$ となり，逆像の定義より $f(x) \in B$ であるから $y = f(x) \in B$ が得られる．したがって，$f(f^{-1}(B)) \subset B$ である．■