解析学概論　解答例

2015.05.11

■　X，Y，Z を集合とし，$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ を写像とするとき，次が成り立つことを示せ．

(1) $g \circ f$ が単射ならば，f も単射である．

(2) $g \circ f$ が全射ならば，g も全射である．

（解） (1) X の任意の x_1，x_2 に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ ならば，$g \circ f$ が単射であることと

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$$

より $x_1 = x_2$ が成り立つ．したがって，f は単射である．

(2) 任意の $z \in Z$ に対して，$g \circ f$ が全射であるから，ある $x \in X$ が取れて，$z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ となるので，$y = f(x) \in Y$ は $z = g(y)$ をみたす．したがって，g は全射である．■