

■ $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ における二項関係 $\overset{R}{\sim}$ を

$$(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_2, y_2) \iff \exists r > 0 (x_2 = r x_1 \text{ かつ } y_2 = r y_1)$$

により定義すると、二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は X における同値関係であることを示せ.

(解) (1) $x = 1 \cdot x$, $y = 1 \cdot y$ より、二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義において $r = 1$ と取ると、 $(x, y) \overset{R}{\sim} (x, y)$ が得られる.

(2) $(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_2, y_2)$ とする. 二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義より、ある $r > 0$ が取れて $x_2 = r x_1$, $y_2 = r y_1$ となる. $\gamma = 1/r$ とおくと、 $\gamma > 0$ であり、 $x_1 = \gamma x_2$, $y_1 = \gamma y_2$ が成り立ち、二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義より $(x_2, y_2) \overset{R}{\sim} (x_1, y_1)$ が得られる.

(3) $(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_2, y_2)$, $(x_2, y_2) \overset{R}{\sim} (x_3, y_3)$ とする. 二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義より、ある $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ が取れて

$$x_2 = r_1 x_1, \quad y_2 = r_1 y_1, \quad x_3 = r_2 x_2, \quad y_3 = r_2 y_2$$

となる. $\gamma = r_1 r_2$ とおくと、 $\gamma > 0$ であり、 $x_3 = \gamma x_1$, $y_3 = \gamma y_1$ が成り立ち、二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義より $(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_3, y_3)$ が得られる.

以上から、二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は X における同値関係である. ■