# 解析学概論　解答例

2015.05.25

■　$X=\mathbb{Z}$ における二項関係 $\overset{R}{\sim}$ を

$$x \overset{R}{\sim} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z}$$

により定義する．このとき，(1) 二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は $X$ における同値関係であることを示し，(2) 各 $k$ （$k=0$，1，2）に対して，$k$ を代表元とする同値関係 $\overset{R}{\sim}$ に関する同値類 $C(k)$ を調べよ．

**（解）** (1) (i) 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して $(x-x)/3=0 \in \mathbb{Z}$ より $x \overset{R}{\sim} x$ である．(ii) $x \overset{R}{\sim} y$ とすると，$(y-x)/3 \in \mathbb{Z}$ より

$$\frac{x-y}{3} = (-1)\cdot\frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z}$$

となるので，$y \overset{R}{\sim} x$ である．(iii) $x \overset{R}{\sim} y$ かつ $y \overset{R}{\sim} z$ とすると，$(y-x)/3 \in \mathbb{Z}$ かつ $(z-y)/3 \in \mathbb{Z}$ より

$$\frac{z-x}{3} = \frac{y-x}{3} + \frac{z-y}{3} \in \mathbb{Z}$$

となるので，$x \overset{R}{\sim} z$ である．以上から，二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は $X$ における同値関係である．

(2) $A_k = \{\, k+3n \,|\, n \in \mathbb{Z} \}$ とおく．(i) 任意に $x \in A_k$ を取る．$A_k$ の定義より，ある $n \in \mathbb{Z}$ が取れて，$x=k+3n$ が成り立つので，$(k-x)/3=-n \in \mathbb{Z}$ より $x \overset{R}{\sim} k$，つまり，$x \in C(k)$ となる．したがって，$A_k \subset C(k)$ である．(ii) 任意に $x \in C(k)$ を取る．$x \overset{R}{\sim} k$ より $(k-x)/3=n \in \mathbb{Z}$ であるから，$-n \in \mathbb{Z}$ より $x=k+3\cdot(-n) \in A_k$ となる．したがって，$C(k) \subset A_k$ である．以上から，$C(k)=A_k=\{\, k+3n \,|\, n \in \mathbb{Z} \}$ である．■