

■ $\mathbf{a} = (1, 0)^T$ とし, $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ をみたす 2 次元ベクトルとする. ここで, A^T は行列 A の転置行列を表す. 集合 P を

$$P = \{ \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \mid \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \}$$

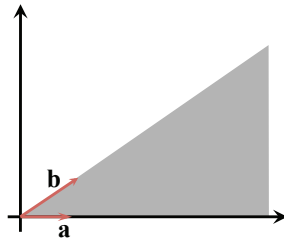
により定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 要素 $(x, y)^T \in P$ と 2 次元平面上の点 (x, y) を同一視して, 集合 P の表す範囲を 2 次元平面上に図示せよ.
- (2) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$ に対して $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P$ が成り立つことを示せ.
- (3) $X = \mathbb{R}^2$ 上の二項関係 $\sim^R$ を

$$(x_1, y_1) \sim^R (x_2, y_2) \iff (x_2 - x_1, y_2 - y_1)^T \in P$$

により定めるとき, 二項関係 $\sim^R$ は X における順序関係であるか調べよ.

(解) (1) 集合 P が表す領域は半直線 $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$ ($t \geq 0$) と $\mathbf{x} = t\mathbf{b}$ ($t \geq 0$) で囲まれた下図の灰色の無限領域である. $Q = \{-\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in P\}$ とおくと, $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$ であることに注意したい.



(2) 任意に $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$ に対して, 集合 P の定義より $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}$, $\mathbf{y} = \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}$ をみたす非負の $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ が存在し, $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \beta_1 + \beta_2 \geq 0$ より

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{a} + (\beta_1 + \beta_2) \mathbf{b} \in P$$

が成り立つ.

(3) (i) 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $(x - x, y - y)^T = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} \in P$ となるので, $(x, y) \sim^R (x, y)$ である. (ii) $(x_1, y_1) \sim^R (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \sim^R (x_1, y_1)$ とする. 集合 P と Q の定義より

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)^T = -(x_2 - x_1, y_2 - y_1)^T \in P \cap Q$$

より $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)^T = \mathbf{0}$, つまり, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ である. (iii) $(x_1, y_1) \sim^R (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \sim^R (x_3, y_3)$ とすると, (2) で示したことから, 二項関係 $\sim^R$ の定義より

$$(x_3 - x_1, y_3 - y_1)^T = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)^T + (x_3 - x_2, y_3 - y_2)^T \in P$$

であるから, $(x_1, y_1) \sim^R (x_3, y_3)$ が成り立つ. 以上から, 二項関係 $\sim^R$ は X における順序関係である. ■