解析学概論　解答例

2015.06.08

■　次の問いに答えよ．

(1) すべての整数 n，ℓ （$0 \leq \ell < n$）に対して ${}_{n+1}C_{\ell+1} = {}_nC_\ell + {}_nC_{\ell+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) x，y は 0 でない実数とする．数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n に対して

$$(x+y)^n = \sum_{\ell=0}^{n} {}_nC_\ell\, x^\ell\, y^{n-\ell} \tag{E}$$

が成り立つことを示せ．

（解） (1) 二項係数の定義より

$$\begin{aligned}
{}_{n+1}C_{\ell+1} =& \frac{(n+1)!}{(\ell+1)! \cdot \{(n+1)-(\ell+1)\}!} = \frac{\{(\ell+1)+(n-\ell)\} \cdot n!}{(\ell+1)! \cdot (n-\ell)!} \\
=& \frac{(\ell+1) \cdot n!}{(\ell+1) \cdot \ell! \cdot (n-\ell)!} + \frac{(n-\ell) \cdot n!}{(\ell+1)! \cdot (n-\ell) \cdot \{n-(\ell+1)\}!} = {}_nC_\ell + {}_nC_{\ell+1}
\end{aligned}$$

となる．

(2) [I] $n=1$ のとき，

$$\text{(E) の右辺} = \sum_{\ell=0}^{1} {}_1C_\ell\, x^\ell\, y^{1-\ell} = {}_1C_0\, x^0\, y^{1-0} + {}_1C_1\, x^1\, y^{1-1} = x+y$$

より関係式 (E) が成り立つ．[II] $n=k$ のとき (E) が成り立つと仮定する．すべての自然数 m に対して ${}_mC_0 = 1$，${}_mC_m = 1$ であることに注意し，変数変換 $m = \ell+1$ と用いると，

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} =& (x+y) \cdot (x+y)^k = (x+y) \cdot \sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell\, x^\ell\, y^{k-\ell} \\
=& \sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell\, x^{\ell+1}\, y^{k-\ell} + \sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell\, x^\ell\, y^{k-\ell+1} = \sum_{m=1}^{k+1} {}_kC_{m-1}\, x^m\, y^{(k+1)-m} + \sum_{\ell=0}^{n} {}_kC_\ell\, x^\ell\, y^{(k+1)-\ell} \\
=& {}_kC_{(k+1)-1}\, x^{k+1}\, y^{(k+1)-(k+1)} + \sum_{m=1}^{k} \left({}_kC_{m-1} + {}_kC_m\right) x^m\, y^{(k+1)-m} + {}_kC_0\, x^0\, y^{(k+1)-0} \\
=& {}_{k+1}C_{k+1}\, x^{k+1}\, y^{(k+1)-(k+1)} + \sum_{m=1}^{k} {}_{k+1}C_m\, x^m\, y^{(k+1)-m} + {}_{k+1}C_0\, x^0\, y^{(k+1)-0} \\
=& \sum_{m=0}^{k+1} {}_{k+1}C_m\, x^m\, y^{(k+1)-m}
\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも (E) が成り立つ．数学的帰納法より，すべての自然数 n に対して (E) が成り立つ．■