解析学概論　解答例

2015.06.22

■　各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$\Psi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ を帰納的に (1) $\Psi_n(0) = 0$，(2) $\Psi_n(S(m)) = \Psi_n(m) + n$ ($m \in \mathbb{N}_0$) により定義し，$1 = S(0)$ とおく．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して (1) $\Psi_0(n) = 0$，(2) $\Psi_1(n) = n = \Psi_n(1)$ が成り立つことを示せ．

(解)　Ψ_n の定義 (2) より

$$\Psi_n(1) \overset{1=S(0)}{=} \Psi_n(S(0)) \overset{\text{定義 (2)}}{=} \Psi_n(0) + n \overset{\text{定義 (1)}}{=} 0 + n \overset{\text{単位元}}{=} n$$

が成り立つことに注意したい．また，

$$n + 1 = \Phi_n(1) \overset{1=S(0)}{=} \Psi_n(S(0)) \overset{\Phi_n\ \text{の定義 (2)}}{=} S(\Phi_n(0)) \overset{\Phi_n\ \text{の定義 (1)}}{=} S(n)$$

と表せる．

(1) (i) Ψ_n の定義 (1) より $\Psi_0(0) = 0$ となり，$n = 0$ のとき $\Psi_0(n) = 0$ が成り立つ．(ii) $\Psi_0(n) = 0$ を仮定すると，

$$\Psi_0(S(n)) \overset{\text{定義 (2)}}{=} \Psi_0(n) + 0 \overset{\text{仮定}}{=} 0 + 0 \overset{\text{単位元}}{=} 0$$

が成り立つ．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_0(n) = 0$ が成り立つ．

(2) (i) Ψ_n の定義 (1) より $\Psi_1(0) = 0$ となり，$n = 0$ のとき $\Psi_1(n) = 0$ が成り立つ．(ii) $\Psi_1(n) = n$ を仮定すると，

$$\Psi_1(S(n)) \overset{\text{定義 (2)}}{=} \Psi_1(n) + 1 \overset{\text{仮定}}{=} n + 1 \overset{S\ \text{の性質}}{=} S(n)$$

が成り立つ．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_1(n) = n$ が成り立つ．■