解析学概論　解答例

2015.06.29

■　$\mathbb{N}_0$ における二項関係 $\leq_{\mathbb{N}_0}$ を

$$n \leq_{\mathbb{N}_0} m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{N}_0 \ (m = \Phi_k(n))$$

により定義するとき，二項関係 $\leq_{\mathbb{N}_0}$ は $\mathbb{N}_0$ における順序関係であることを示せ．

(解)　(1) $0 \in \mathbb{N}_0$ は加法における単位元であるから，$n = 0 + n = \Phi_0(n)$ より $n \leq_{\mathbb{N}_0} n$ が成り立つ．

(2) $n \leq_{\mathbb{N}_0} m$ かつ $m \leq_{\mathbb{N}_0} n$ を仮定する．二項関係 $\leq_{\mathbb{N}_0}$ の定義より，ある k_1，$k_2 \in \mathbb{N}_0$ が存在して，$m = \Phi_{k_1}(n)$，$n = \Phi_{k_2}(m)$ が成り立つ．

$$\Phi_n(0) \overset{\text{定義 (1)}}{=} n \overset{\text{仮定}}{=} \Phi_{k_2}(\Phi_{k_1}(n)) \overset{\text{結合}}{=} \Phi_{\Phi_{k_2}(k_1)}(n) \overset{\text{交換}}{=} \Phi_n(\Phi_{k_2}(k_1))$$

と簡約法則により $0 = \Phi_{k_2}(k_1)$ が得られる．性質

$$0 = \Phi_n(m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = 0 \text{ かつ } m = 0$$

が成り立つので，$k_1 = k_2 = 0$ となる．したがって，$m = \Phi_{k_1}(n) = \Phi_0(n) = n$ である．

(3) $n \leq_{\mathbb{N}_0} m$ かつ $m \leq_{\mathbb{N}_0} \ell$ を仮定する．二項関係の定義より，ある k_1，$k_2 \in \mathbb{N}_0$ が存在して，$m = \Phi_{k_1}(n)$，$\ell = \Phi_{k_2}(m)$ が成り立つ．

$$\ell \overset{\text{仮定}}{=} \Phi_{k_2}(\Phi_{k_1}(n)) \overset{\text{結合}}{=} \Phi_{\Phi_{k_2}(k_1)}(n)$$

と $\Phi_{k_2}(k_1) \in \mathbb{N}_0$ より $n \leq_{\mathbb{N}_0} \ell$ が得られる．

以上から，二項関係 $\leq_{\mathbb{N}_0}$ は $\mathbb{N}_0$ における順序関係である．■