解析学概論　解答例

2015.07.13

■　$X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ 上の二項関係 $\overset{R}{\sim}$ を

$$(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_2, m_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

により定義するとき，二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は X における同値関係である（証明しなくても良い）．$(n, m) \in X$ を代表元とする同値類を $[(n, m)]$ と表し，商集合 $\mathbb{Z} = X/\overset{R}{\sim}$ における二項関係 $\leq_{\mathbb{Z}}$ を

$$[(n_1, m_1)] \leq_{\mathbb{Z}} [(n_2, m_2)] \qquad \Longleftrightarrow \qquad n_1 + m_2 \leq_{\mathbb{N}_0} n_2 + m_1$$

により定義するとき，二項関係 $\leq_{\mathbb{Z}}$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できていることを示せ．

（解）　$[(n_1, m_1)] \leq_{\mathbb{Z}} [(n_2, m_2)]$，$[(n_1, m_1)] = [(\hat{n}_1, \hat{m}_1)]$，$[(n_2, m_2)] = [(\hat{n}_2, \hat{m}_2)]$ とする．定義より，

$$n_1 + m_2 \leq_{\mathbb{N}_0} n_2 + m_1, \qquad n_1 + \hat{m}_1 = \hat{n}_1 + m_1, \qquad n_2 + \hat{m}_2 = \hat{n}_2 + m_2$$

であり，さらに，ある $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して $n_2 + m_1 = n_1 + m_2 + k$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}(n_1 + m_2) + (\hat{n}_2 + \hat{m}_1) =& (n_1 + \hat{m}_1) + (\hat{n}_2 + m_2) = (\hat{n}_1 + m_1) + (n_2 + \hat{m}_2) \\ =& (n_2 + m_1) + (\hat{n}_1 + \hat{m}_2) = (n_1 + m_2) + k + (\hat{n}_1 + \hat{m}_2)\end{aligned}$$

と簡約法則により，$\hat{n}_2 + \hat{m}_1 = k + (\hat{n}_1 + \hat{m}_2)$ が得られる．$\leq_{\mathbb{N}_0}$ の定義より $\hat{n}_1 + \hat{m}_2 \leq_{\mathbb{N}_0} \hat{n}_2 + \hat{m}_1$ となり，$\leq_{\mathbb{Z}}$ の定義より $[(\hat{n}_1, \hat{m}_1)] \leq_{\mathbb{Z}} [(\hat{n}_2, \hat{m}_2)]$ が成り立つ．したがって，二項関係 $\leq_{\mathbb{Z}}$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できている．■