解析学 I　解答例

2016.10.17

■　次の問に答えよ．

(1) 命題「任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|\,a\,| < \varepsilon$ が成り立つ．」において a はどのような値か調べよ．

(2) n を自然数とする．命題「n^2 が 2 で整除できるならば，n も 2 で整除できる．」を背理法と対偶を用いてそれぞれ証明せよ．

(解) (1)： $|\,a\,| > 0$ と仮定する．$\varepsilon = |\,a\,|/2$ とおき，命題を適用すると，

$$0 < |\,a\,| < \varepsilon = \frac{|\,a\,|}{2} < |\,a\,|$$

となり，矛盾である．したがって，$|\,a\,| = 0$，つまり，$a = 0$ である．

(2) 背理法：n^2 は 2 で整除でき，かつ，n は 2 で整除できないと仮定する．ある $k \in \mathbb{N}$ を用いて $n = 2\,k-1$ と表せ，

$$n^2 = (2\,k-1)^2 = 2\,(2\,k^2 - 2\,k) + 1, \qquad 2\,k^2 - 2\,k \in \mathbb{Z}$$

となり，n^2 は 2 で整除できないことになる．これは n^2 が 2 で整除できることに矛盾である．したがって，n^2 が 2 で整除できるならば，n も 2 で整除できる．

対偶： n が 2 で整除できないと仮定する．ある $k \in \mathbb{N}$ を用いて $n = 2\,k-1$ と表せるので，

$$n^2 = (2\,k-1)^2 = 2\,(2\,k^2 - 2\,k) + 1, \qquad 2\,k^2 - 2\,k \in \mathbb{Z}$$

となり，n^2 は 2 で整除できない．対偶をとることにより，n^2 が 2 で整除できるならば，n も 2 で整除できる．■