解析学 I　解答例

2016.10.24

■　数列 $\{a_n\}$ を

$$0 < a_1 < 1; \qquad a_{n+1} = \gamma\, a_n\,(1 - a_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，次の問に答えよ．

(1) $0 < \gamma < 4$ のとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 < \gamma < 1$ のとき極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を調べよ．

(解) (1)： 示すべき不等式を (E) とする．定義より $n = 1$ のときには不等式 (E) が成り立つ．$n = k$ のとき不等式 (E) が成り立つと仮定すると，

$$0 < a_{k+1} = \gamma\, a_n\,(1 - a_n) = \gamma \left\{ \frac{1}{4} - \left(a_k - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \leq \frac{\gamma}{4} < 1$$

となり，$n = k + 1$ のときにも不等式 (E) が成り立つ．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して不等式 (E) が成り立つ．

(2)： (1) より，すべての自然数 $n \geq 2$ に対して

$$0 < a_n = \gamma\, a_{n-1}\,(1 - a_{n-1}) < \gamma\, a_{n-1} < \gamma^2\, a_{n-2} < \cdots < \gamma^{n-1}\, a_1$$

となる．はさみうちの原理と $\lim_{n\to\infty} \gamma^n = 0$ により，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．■