解析学 I　解答例

2016.10.31

■　極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

を前提にして，極限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

を調べよ．

(解)　x を超えない最大の整数を $[x]$ により表すことにする．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $[x] \leq x < [x]+1$ が成り立つので，$x \geq 1$ なら

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

となり，$x \to +\infty$ のとき，$[x] \to \infty$ であり，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right\} = e\cdot 1 = e, \\
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = e\cdot 1 = e
\end{aligned}$$

が成り立つので，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

である．また，変数変換 $t = -x-1$ により

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right\} = e\cdot 1 = e
\end{aligned}$$

が得られる．■