解析学 I　解答例

2016.11.07

■　$1<\gamma<2$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\frac{1}{2};\qquad a_{n+1}=\gamma\,a_n\,(1-a_n),\qquad n=1,2,3,\cdots$$

により定義するとき，極限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在するか調べよ．存在する場合には，その極限を求めよ．

(解)　すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$a_{n+1}=-\gamma\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\gamma}{4}\le\frac{\gamma}{4}<\frac{1}{2}$$

が成り立つことに注意したい．また，2 次方程式 $x=\gamma\,x\,(1-x)$ の正の解 α は

$$0<\alpha=\frac{\gamma-1}{\gamma}=1-\frac{1}{\gamma}<\frac{1}{2}$$

をみたす．

$a_1>\alpha$ であり，$a_n>\alpha$ と仮定すると，$\alpha+a_n<1$ より

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{a_n\,(1-a_n)}{1-\alpha}-\alpha=\frac{(a_n-\alpha)\,(1-\alpha-a_n)}{1-\alpha}>0$$

が得られるので，数学的帰納法により，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n>\alpha$ である．また，

$$a_2-a_1=\frac{\gamma}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\gamma-2}{4}<0,\qquad \text{つまり，}\quad a_2<a_1$$

であり，$a_{n+1}<a_n$ と仮定すると，$a_n+a_{n+1}<1$ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\gamma\,a_{n+1}\,(1-a_{n+1})-\gamma\,a_n\,(1-a_n)=\gamma\,(a_{n+1}-a_n)\,(1-a_n-a_{n+1})<0$$

が得られるので，数学的帰納法により，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $\alpha<a_{n+1}\le a_n$ が成り立つ．

$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列であるから，極限 $s=\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在する．漸化式において $n\to\infty$ とすると，

$$s=\gamma\,s\,(1-s),\qquad \text{つまり，}\quad s=0\quad\text{または}\quad s=\alpha$$

である．すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n>\alpha$ であるから，$s\ge\alpha$ が得られ，$s=\alpha$ である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\frac{\gamma-1}{\gamma}$$

となる．■