解析学 I　解答例

2016.11.14

■　$0 < b < a$ とし，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b; \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ および $\lim_{n\to\infty} b_n$ を調べよ．

(解)　数学的帰納法を用いて，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$，$b_n > 0$ であることが示せるので，相加平均・相乗平均より

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \le \frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が成り立つ．また，

$$a_1 - a_2 = \frac{a - b}{2} > 0, \qquad b_2 - b_1 = \sqrt{a\, b} - b = \frac{b\,(a - b)}{\sqrt{a\, b} + b} > 0$$

であり，$b_n \le b_{n+1} \le a_{n+1} \le a_n$ ならば

$$a_{n+1} - a_{n+2} = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{2} \ge 0, \qquad b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{b_{n+1}\,(a_{n+1} - b_{n+1})}{\sqrt{a_{n+1}\, b_{n+1}} + b_{n+1}} \ge 0$$

より $b_{n+1} \le b_{n+2} \le a_{n+2} \le a_{n+1}$ が得られるので，数学的帰納法により

$$b = b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \le b_{n+1} \le \cdots \le a_{n+1} \le a_n \le \cdots \le a_2 \le a_1 = a$$

が成り立つ，つまり，$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列，$\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列である．したがって，極限

$$a_* = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad b_* = \lim_{n\to\infty} b_n$$

が存在する．漸化式において $n \to \infty$ とすると

$$a_* = \frac{a_* + b_*}{2}, \qquad b_* = \sqrt{a_*\, b_*}, \qquad \text{つまり，} \quad a_* = b_*$$

が成り立つ．■