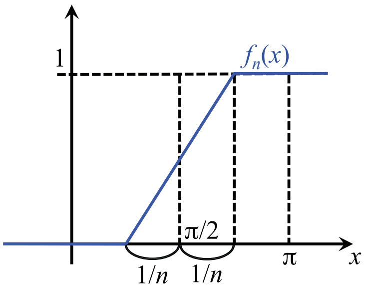
解析学 I　解答例

2016.11.21

■　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して関数 $f_n(x)$ を下図のように定め，各 n，$m \in \mathbb{N}$ に対して，$d_1(f_n, f_m)$，$d_\infty(f_n, f_m)$ を次のようにおく．



$$d_1(f_n, f_m) = \int_0^\pi |\, f_n(x) - f_m(x)\,|\, dx$$
$$d_\infty(f_n, f_m) = \sup_{0 \le x \le \pi} |\, f_n(x) - f_m(x)\,|$$

このとき，$d_1(f_n, f_m)$，$d_\infty(f_n, f_m)$ はそれぞれ命題

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ : n, m \ge n_0 \implies d_1(f_n, f_m) < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ : n, m \ge n_0 \implies d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$$

をみたすか調べよ．

(解)　$f_n(x)$ は

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(x < \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right) \\ \dfrac{n}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right) \\ 1 & \left(x > \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

と表せるので，$d_1(f_n, f_m)$，$d_\infty(f_n, f_m)$ はそれぞれ

$$d_1(f_n, f_m) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\min(n,m)} - \frac{1}{\max(n,m)}\right\}, \qquad d_\infty(f_n, f_m) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\min(n,m)}{\max(n,m)}\right\}$$

と表されることに注意したい．任意に $\varepsilon > 0$ に対して，アルキメデスの原理を適用すると，$n_0\,\varepsilon > 1$ をみたす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての n，$m \ge n_0$ に対して

$$0 \le d_1(f_n, f_m) < \frac{1}{2\,\min(n,m)} \le \frac{1}{2\,n_0} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$d_1(f_n, f_m)$ については与えられた命題がみたされる．また，$\varepsilon = 1/8$，$n = 2\,m$ とおくと，$n > m$ より

$$d_\infty(f_n, f_m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{2\,m}\right) = \frac{1}{4} \ge \varepsilon$$

であるから，命題

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n, m \in \mathbb{N} :\ n, m \ge n_0\ \wedge\ d_\infty(f_n, f_m) \ge \varepsilon$$

が成り立つ．上記は $d_\infty(f_n, f_m)$ に対する与えられた命題の否定命題が成り立つことを意味するので，$d_\infty(f_n, f_m)$ については与えられた命題がみたされない． ■