解析学 I　解答例

2016.11.28

■　次の問に答えよ．

(1) 任意の $a>0$ に対して極限 $\lim_{n\to\infty} a^{1/n}$ を求めよ．

(2) 極限

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}|\,x_k\,|^p\right)^{1/p}$$

を求めよ．

（解） (1) $a=1$ のときには

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n}=\lim_{n\to\infty} 1^{1/n}=1$$

である．$a>1$ のときには，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$a^{1/n}=1+\alpha_n$ とおくと，$\alpha_n\geq 0$ より

$$a=(1+\alpha_n)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,\alpha_n^k\geq {}_nC_1\,\alpha_n=n\,\alpha_n,\qquad \text{つまり，}\quad 0\leq\alpha_n\leq\frac{a}{n}$$

が得られるので，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\qquad \text{つまり，}\quad \lim_{n\to\infty} a^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)=1$$

となる．$a<1$ のときには，$b=1/a$ とおくと，$b>1$ より

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{1/n}}=\frac{1}{1}=1$$

が得られる．(2)

$$|\,x_\ell\,|=\max\left(|\,x_1\,|,|\,x_2\,|,\cdots,|\,x_N\,|\right)$$

をみたす自然数 ℓ （$1\leq\ell\leq N$）が存在する．このとき，

$$|\,x_\ell\,|^p\leq\sum_{k=1}^{N}|\,x_k\,|^p\leq\sum_{k=1}^{N}|\,x_\ell\,|^p=N\,|\,x_\ell\,|^p$$

であるから，

$$|\,x_\ell\,|\leq\left(\sum_{k=1}^{N}|\,x_k\,|^p\right)^{1/p}\leq\sum_{k=1}^{N}|\,x_\ell\,|^p=N^{1/p}\,|\,x_\ell\,|\leq N^{1/[p]}\,|\,x_\ell\,|$$

が得られる．ここで，$[p]$ は p を超えない最大の整数である．はさみうちの原理と前問題 (1) により

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}|\,x_k\,|^p\right)^{1/p}=|\,x_\ell\,|=\max\left(|\,x_1\,|,|\,x_2\,|,\cdots,|\,x_N\,|\right)$$

となる．■