解析学 I　解答例

2016.12.05

■　$2 < \gamma < 3$，$f(x) = \gamma\, x\,(1-x)$ とし，数列 $\{\, x_n \,\}$ を

$$x_1 = \frac{1}{2}; \qquad x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{2\,n-1} \le x_{2\,n+1} \le \alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \le x_{2\,n+2} \le x_{2\,n}$$

が成り立つことを示せ．

(解)　$2 < \gamma < 3$ より

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 =& f(x_1) - f(f(x_1)) = \frac{\gamma\,(\gamma-2)^2}{16} > 0, \\ x_3 - x_1 =& f(f(x_1)) - x_1 = -\frac{(\gamma-2)\,\{\gamma - (1+\sqrt{5})\}\,\{\gamma - (1-\sqrt{5})\}}{2} > 0 \end{aligned}$$

であり，$x \ge 1/2$ の範囲で $f(x)$ は単調減少であるから，$f([x_1, x_2]) = [f(x_2), f(x_1)] = [x_3, x_2] \subset [x_1, x_2]$ が得られる．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{2} = x_1 \le x_n \le x_2 = \frac{\gamma}{4} < \frac{3}{4}$$

が成り立つ．また，

$$x_1 - \alpha = \frac{2-\gamma}{2\,\gamma} < 0, \qquad x_2 - \alpha = \frac{(\gamma-2)^2}{4\,\gamma} > 0,$$
$$1 - \gamma\, x_n \le \frac{2-\gamma}{2} < 0, \qquad x_{n+1} - \alpha = f(x_n) - \alpha = (x_n - \alpha)\,(1 - \gamma\, x_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $(-1)^n\,(x_n - \alpha) \ge 0$ である．さらに，$x - f(x) = \gamma\, x\,(x - \alpha)$ より

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+2} =& x_n - f(f(x_n)) = \{x_n - f(x_n)\} + \{f(x_n) - f(f(x_n))\} \\ =& \gamma\, x_n\,(x_n - \alpha) + \gamma\, f(x_n)\,(f(x_n) - \alpha) = \gamma\, x_n\,(x_n - \alpha)\,\{1 + \gamma\,(1 - x_n)\,(1 - \gamma\, x_n)\} \\ =& \gamma\, x_n\,(x_n - \alpha)\,\{\gamma^2\, x_n^2 - \gamma\,(\gamma+1)\,x_n + \gamma + 1\}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

となる．

$$\{\gamma\,(\gamma+1)\}^2 - 4\,\gamma^2\,(\gamma+1) = \gamma^2\,(\gamma+1)\,(\gamma-3) < 0$$

より，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\gamma^2\, x_n^2 - \gamma\,(\gamma+1)\,x_n + \gamma + 1 > 0$ であるから，$x_n \le \alpha$ なら $x_n \le x_{n+2} \le \alpha$ であり，$x_n \ge \alpha$ なら $x_n \ge x_{n+2} \ge \alpha$ である．以上から，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{2} \le x_{2\,n-1} \le x_{2\,n+1} \le \alpha \le x_{2\,n+2} \le x_{2\,n} \le \frac{\gamma}{4}$$

が成り立つ．■