解析学 I　解答例

2016.12.12

■　数列 $\{ a_n \}$ を

$$a_n = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{e^{i\,\pi/4}}{2}\right)^n\right], \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{および} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n$$

を求めよ．

(解)　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，指数法則より

$$a_n = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\,\pi\,n/4}}{2^n}\right] = \mathrm{Re}\left[2^{-n}\,\left(\cos\frac{\pi\,n}{4} + i\,\sin\frac{\pi\,n}{4}\right)\right] = 2^{-n}\,\cos\frac{\pi\,n}{4}$$

である．また，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\alpha_n = \inf\{\, a_k \mid k \geq n \,\}, \qquad \beta_n = \sup\{\, a_k \mid k \geq n \,\}$$

とおくと，$\alpha_n < 0 < \beta_n$ である．さらに，すべての自然数 $k \geq n$ に対して，$-1 \leq \cos(\pi\,k/4) \leq 1$ より

$$-2^{-n} \leq -2^{-k} \leq a_k \leq 2^{-k} \leq 2^{-n}$$

であるから，

$$-2^{-n} \leq \alpha_n < 0 < \beta_n \leq 2^{-n}$$

が成り立つ．はさみうちの原理より

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$$

となる．■