解析学 I　解答例

2016.12.19

■　数列 $\{\, a_n \,\}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ をみたすとし，数列 $\{\, s_n \,\}$ を

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義する．このとき，上極限

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

が存在し，$0 \le \rho < 1$ をみたすとき，$\{\, s_n \,\}$ は基本列であることを示せ．

(解)　$\delta = (1-\rho)/2$，$\gamma = \rho + \delta$ とおくと，$\gamma < 1$ である．また，

$$\alpha_n = \sup \left\{ \frac{a_{k+1}}{a_k} \;\middle|\; k \ge n \right\}$$

とおくと，上極限の定義より

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \ge n_1 \implies |\, \alpha_n - \rho \,| < \delta$$

が成り立つ．$n \ge n_1$ ならば

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \alpha_n < \rho + \delta = \gamma$$

であるから，すべての $n \ge n_1$ に対して $a_n \le \gamma^{n-n_1} a_{n_1}$ が成り立つ．

　任意に $\varepsilon > 0$ を取り固定し，

$$\frac{\gamma^{n_2+1} a_{n_1}}{1-\gamma} < \varepsilon, \qquad \text{つまり，}\quad n_2 > \log_\gamma \frac{\varepsilon\,(1-\gamma)}{\gamma\, a_{n_1}}$$

をみたす $n_2 \in \mathbb{N}$ を取り，$n_0 = n_1 + n_2$ とおくと，すべての自然数 n，$m \ge n_0$ に対して

$$\begin{aligned}
|\, s_n - s_m \,| &= \sum_{k=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} a_k \le \sum_{k=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \gamma^{k-n_1} a_{n_1} \\
&\le \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \gamma^{k-n_1} a_{n_1} = \frac{\gamma^{n_0+1-n_1} a_{n_1}}{1-\gamma} = \frac{\gamma^{n_2+1} a_{n_1}}{1-\gamma} < \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\{\, s_n \,\}$ は基本列である．■