解析学 I　解答例

2017.01.16

■　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $p_n = 2^{-n}$ とおくとき，級数

$$S = -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \log_2 p_n$$

の値を求めよ．

(解)　求める値 S は

$$S = -\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \log_2 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n}$$

と表されるので，変数変換 $\ell = n+1$ により

$$\begin{aligned} S =& 2\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} - 2^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n}\right\} = 2\left\{2^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n\,2^{-n} - \sum_{\ell=2}^{\infty}(\ell-1)\,2^{-\ell}\right\} \\ =& 1 + 2\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} = 1 + 2\cdot 2^{-2}\cdot\frac{1}{1-1/2} = 2 \end{aligned}$$

となる．■