解析学 II　解答例

2016.04.18

■　実数 $x_1 > 0$ を適当に与えて，数列 $\{ x_n \}$ を

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2\,x_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(解)　数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n > 0$ であることが示せる．$y_n = (x_n - 1)/(x_n + 1)$ とおくと，

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{x_n^2 + 1}{2\,x_n} - 1}{\dfrac{x_n^2 + 1}{2\,x_n} + 1} = \left(\frac{x_n - 1}{x_n + 1} \right)^2 = y_n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

がみたされる．

$$y_2 = y_1^2 = y_1^{2^1}, \qquad y_3 = \left(y_1^{2^1} \right)^2 = y_1^{2\cdot 2^1} = y_1^{2^2}, \qquad y_4 = \left(y_1^{2^2} \right)^2 = y_1^{2\cdot 2^2} = y_1^{2^3}, \qquad \cdots$$

より，すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $y_n = y_1^{2^{n-1}}$ と推測でき，数学的帰納法によりその推測が妥当であることが示せる．$x_1 > 0$ より

$$-1 < -\frac{1}{x_1 + 1} < y_1 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} < 1$$

より

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_1^{2^{n-1}} = 0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + y_n}{1 - y_n} = 1$$

となる．■