解析学 II　解答例

2016.04.25

■　数列 $\{p_n\}$ と実数 $x_1 > 0$ を適当に与えて，数列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = p_n\, x_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1) ある $0 \le \gamma < 1$ が取れて，すべての自然数 n に対して $0 \le p_n \le \gamma$ が成り立つとき，極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して $0 \le p_n < 1$ が成り立つとき，極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を調べよ．

(解) (1) $\{x_n\}$ の定義と $\{p_n\}$ の条件により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \le x_n = p_{n-1}\, x_{n-1} = p_{n-1}\, p_{n-2}\, x_{n-2} = \cdots = p_{n-1}\, p_{n-2} \cdots p_2\, p_1\, x_1 \le \gamma^{n-1}\, x_1$$

が成り立つ．はさみうちの原理と $0 \le \gamma < 1$ より $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ である．

(2) $\{x_n\}$ の定義と $\{p_n\}$ の条件により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = p_n\, x_n \ge x_n \ge 0$ であるから，$\{x_n\}$ は下に有界で単調減少な数列である．したがって，極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ は存在する．ここで，$a > 0$ とし，

$$x_n = \frac{a\,(n+1)}{n}, \qquad p_n = \frac{(n+2)\,n}{(n+1)^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

とおくと，$x_1 = 2\,a > 0$,

$$x_{n+1} = p_n\, x_n, \qquad 0 \le p_n < 1, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

がみたされ，$\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ となることに注意したい．■