解析学 II　解答例

2016.05.09

■　$a > 1$ とし，数列 $\{x_n\}$ を $x_n = \sqrt[n]{a}$ （$n \in \mathbb{N}$）により定めるとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ であることを示せ．

(解) まず最初に，数列 $\{y_n\}$ を $y_n = a/n$ により定めるとき，$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ が成り立つことを示そう．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，アルキメデスの原理により $n_0\,\varepsilon > a$ をみたす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れ，すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$-\varepsilon < 0 < y_n = \frac{a}{n} \leq \frac{a}{n_0} < \varepsilon, \qquad \text{つまり，} \quad |\,y_n - 0\,| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ である．

　数列 $\{z_n\}$ を $z_n = x_n - 1$ （$n \in \mathbb{N}$）により定める．$a > 1$ より，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n > 0$ である．また，二項定理より，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a = (1 + z_n)^n = \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k z_n^k > {}_nC_1 z_n = n\,z_n, \qquad \text{つまり，} \quad 0 < z_n < y_n$$

が成り立つ．はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (1 + z_n) = 1 + 0 = 1$$

となる．■