解析学 II　解答例

2016.05.16

■　次の問いに答えよ．

(1) $0.\dot{2}\dot{4} \times 0.\dot{3}\dot{5}$ を 1 つの既約分数として表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$ の値を小数第 3 位まで正確に求めよ．

(解) (1) 無限等比級数の和の公式より

$$\begin{aligned} 0.\dot{2}\dot{4} =& 0.24 + 0.0024 + 0.000024 + \cdots = \frac{24}{100} \cdot (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots) = \frac{24}{100} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}} = \frac{8}{33}, \\ 0.\dot{3}\dot{5} =& 0.35 + 0.0035 + 0.000035 + \cdots = \frac{35}{100} \cdot (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots) = \frac{35}{100} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}} = \frac{35}{99} \end{aligned}$$

であるから，

$$0.\dot{2}\dot{4} \times 0.\dot{3}\dot{5} = \frac{8}{33} \cdot \frac{35}{99} = \frac{280}{3267}$$

となる．(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n^2 \geq 8\,n - 16$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{n=4}^{\infty} 2^{-n^2} \leq& \sum_{n=4}^{\infty} 2^{-8\,n+16} = 2^{-16} \sum_{n=4}^{\infty} \left(2^{-8}\right)^{n-4} = 2^{-16} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-8}} \\ <& 2^{-16} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-1}} = 2^{-15} < 10^{-4} \end{aligned}$$

である．また，

$$0 \leq \sum_{n=1}^{3} 2^{-n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^9} = 0.5 + 0.0625 + 0.001953125 = 0.564453125$$

であるから，求める値は 0.564 となる．■