解析学 II　解答例

2016.05.30

■　次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=|\,x\,|^2$ により定義するとき，$f(x)$ の微分可能性を調べよ．

(2) 関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=|\,z\,|^2$ により定義するとき，$f(z)$ の微分可能性を調べよ．

(解) (1) $f(x)=|\,x\,|^2=x^2$ であるから，$f'(x)=2\,x$ となり，$f(x)$ は各 $x\in\mathbb{R}$ に対して微分可能である．

(2) $f(z)=|\,z\,|^2=z\,\overline{z}$ であるから，

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{(z+h)\,(\overline{z}+\overline{h})-z\,\overline{z}}{h}=z\cdot\frac{\overline{h}}{h}+\overline{z}+\overline{h}$$

となるので，

$$\lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}}\left(z\cdot\frac{h}{h}+\overline{z}+h\right)=z+\overline{z}$$

であり，

$$\lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}}\frac{f(z+i\,h)-f(z)}{i\,h}=\lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}}\left(z\cdot\frac{-i\,h}{i\,h}+\overline{z}-i\,h\right)=-z+\overline{z}$$

である．したがって，$z\neq 0$ のときには，$z+\overline{z}\neq -z+\overline{z}$ より $f(z)$ は微分できないが，$z=0$ のときには，$f(z)$ は微分可能である．■