解析学 II　解答例

2016.06.13

■　与えられた自然数 N，M と複素数 $\{f_n\}_{n=-N}^{M}$ に対して，関数 $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ を

$$f(z)=\sum_{n=-N}^{M} f_n\, z^n$$

により定義するとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して線積分

$$\int_{|\,z\,|=\varepsilon} f(z)\,dz$$

を求めよ.

（解） 変数変換 $z=\varepsilon\, e^{i\,\theta}$ （$0\le\theta\le 2\,\pi$）により

$$\int_{|\,z\,|=\varepsilon} f(z)\,dz=\int_0^{2\,\pi}\sum_{n=-N}^{M} f_n\left(\varepsilon\, e^{i\,\theta}\right)^n \varepsilon\, i\, e^{i\,\theta}\,d\theta=i\sum_{n=-N}^{M} f_n\,\varepsilon^{n+1}\int_0^{2\,\pi} e^{i\,(n+1)\,\theta}\,d\theta$$

となる．(i) $n=-1$ のとき

$$\int_0^{2\,\pi} e^{i\,(n+1)\,\theta}\,d\theta=\int_0^{2\,\pi} 1\,d\theta=2\,\pi$$

であり，(ii) $n\ne -1$ （$n\in\mathbb{Z}$）のとき

$$\int_0^{2\,\pi} e^{i\,(n+1)\,\theta}\,d\theta=\left[\frac{e^{i\,(n+1)\,\theta}}{i\,(n+1)}\right]_0^{2\,\pi}=\frac{e^{i\,2\,(n+1)\,\pi}-1}{i\,(n+1)}=\frac{1-1}{i\,(n+1)}=0$$

であるから，

$$\int_{|\,z\,|=\varepsilon} f(z)\,dz=2\,\pi\, i\, f_{-1}$$

となる．■