解析学 II　解答例

2016.06.20

■　関数 $f(z)$ が領域 $D \subset \mathbb{C}$ において正則であるならば，z と $\bar{z}$ を独立な変数とみなしたとき

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0, \qquad z \in D$$

がみたされることを示せ．

（解） z および $f(z)$ を実部と虚部に分けて，

$$z = x + i\,y, \qquad f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$$

と表すことにする．$f(z)$ は D において正則であるから，コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} Q(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y), \qquad z = x + i\,y \in D$$

が成り立つ．また，$\bar{z} = x - i\,y$ より

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2\,i}$$

であるから，合成関数の微分公式（連鎖公式）より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) =& \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial x} f(z) + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial y} f(z) \\
=& \frac{1}{2}\,\left(\frac{\partial}{\partial x} P(x,y) + i\,\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)\right) + \frac{i}{2}\,\left(\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) + i\,\frac{\partial}{\partial y} Q(x,y)\right) \\
=& \frac{1}{2}\,\left(\frac{\partial}{\partial x} P(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} Q(x,y)\right) + \frac{i}{2}\,\left(\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)\right) = 0
\end{aligned}$$

となる．■