解析学 II　解答例

2016.06.27

■　α が $-1<\alpha<1$ をみたすとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz$ を求めよ．

(解)　$0\leq\arg z<2\pi$ をみたすように $\mathrm{Log}\,z$ の分枝を定め，

$$z^\alpha=e^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z}=e^{\alpha\,(\log|\,z\,|+i\,\arg z)}$$

と表す．任意に $0<\varepsilon<1$，$R>2$ を取り，積分路を次のように定める．

$C^R_{\theta_1,\theta_2}$ ：　円 $|\,z\,|=R$ を反時計回りに弧度で θ_1 から θ_2 までの積分路
C^ε_0 ：　円 $|\,z\,|=\varepsilon$ を時計回りに 1 周する積分路
C^ε_+ ：　円 $|\,z-i\,|=\varepsilon$ を時計回りに 1 周する積分路
C^ε_- ：　円 $|\,z+i\,|=\varepsilon$ を時計回りに 1 周する積分路
$\ell^{\varepsilon,R}_{0,-}$ ：　実軸上を R から ε までの積分路
$\ell^{\varepsilon,R}_{0,+}$ ：　実軸上を ε から R までの積分路
$\ell^{\varepsilon,R}_{+,-}$ ：　虚軸上を $(1+\varepsilon)\,i$ から $R\,i$ までの積分路
$\ell^{\varepsilon,R}_{+,+}$ ：　虚軸上を $R\,i$ から $(1+\varepsilon)\,i$ までの積分路
$\ell^{\varepsilon,R}_{-,-}$ ：　虚軸上を $-(1+\varepsilon)\,i$ から $-R\,i$ までの積分路
$\ell^{\varepsilon,R}_{-,+}$ ：　虚軸上を $-R\,i$ から $-(1+\varepsilon)\,i$ までの積分路

このとき，積分路

$$C=C^\varepsilon_0+\ell^{\varepsilon,R}_{0,+}+C^R_{0,\pi/2}+\ell^{\varepsilon,R}_{+,+}+C^\varepsilon_++\ell^{\varepsilon,R}_{+,-}+C^R_{\pi/2,3\,\pi/2}+\ell^{\varepsilon,R}_{-,+}+C^\varepsilon_-+\ell^{\varepsilon,R}_{-,-}+C^R_{3\,\pi/2,2\,\pi}+\ell^{\varepsilon,R}_{0,-}$$

の表す領域においては被積分関数は正則であるから，

$$\int_C\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz=0$$

となり，

$$\begin{aligned}\int_{\ell^{\varepsilon,R}_{+,-}+\ell^{\varepsilon,R}_{+,+}}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz&=\int_{(1+\varepsilon)\,i}^{R\,i}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz+\int_{R\,i}^{(1+\varepsilon)\,i}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz=0,\\ \int_{\ell^{\varepsilon,R}_{-,-}+\ell^{\varepsilon,R}_{-,+}}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz&=\int_{-(1+\varepsilon)\,i}^{-R\,i}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz+\int_{-R\,i}^{-(1+\varepsilon)\,i}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz=0\end{aligned}$$

が得られる．変数変換 $z=R\,e^{i\,\theta}$ により

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\int_{C^R_{0,\pi/2}+C^R_{\pi/2,3\,\pi/2}+C^R_{3\,\pi/2,2\,\pi}}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz&=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\,\pi}\frac{R^\alpha\,e^{i\,\alpha\,\theta}}{1+R^2\,e^{i\,2\,\theta}}\,R\,i\,e^{i\,\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{2\,\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{i\,R^{\alpha-1}\,e^{i\,(\alpha+1)\,\theta}}{R^{-2}+e^{i\,2\,\theta}}\,d\theta=\int_0^{2\,\pi}0\,d\theta=0\end{aligned}$$

となる．また，変数変換 $z=\varepsilon\,e^{i\,\theta}$，$z=\pm i+\varepsilon\,e^{i\,\theta}$ によりそれぞれ

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_0^\varepsilon}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{2\,\pi}^{0}\frac{\varepsilon^\alpha\,e^{i\,\alpha\,\theta}}{1+\varepsilon^2\,e^{i\,2\,\theta}}\,\varepsilon\,i\,e^{i\,\theta}\,d\theta \\
&= -\,i\int_0^{2\,\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^{\alpha+1}\,e^{i\,(\alpha+1)\,\theta}}{1+\varepsilon^2\,e^{i\,2\,\theta}}\,d\theta = i\int_0^{2\,\pi}0\,d\theta=0, \\
\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_\pm^\varepsilon}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{2\,\pi}^{0}\frac{(\pm i+\varepsilon\,e^{i\,\theta})^\alpha}{1+(\pm i+\varepsilon\,e^{i\,\theta})^2}\,\varepsilon\,i\,e^{i\,\theta}\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\,\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{i\,(\pm i+\varepsilon\,e^{i\,\theta})^\alpha}{\pm 2\,i+\varepsilon\,e^{i\,\theta}}\,d\theta = -\int_0^{2\,\pi}\frac{(\pm i)^\alpha}{2}\,d\theta=\mp\pi\,(\pm i)^\alpha
\end{aligned}$$

となる．さらに，積分路 $\ell_{0,-}^{\varepsilon,R}$ における z は，積分路 $\ell_{0,+}^{\varepsilon,R}$ における z より偏角が 2π だけ増えているので，

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{\ell_{0,+}^{\varepsilon,R}+\ell_{0,-}^{\varepsilon,R}}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz &= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left\{\int_\varepsilon^R\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz+\int_R^\varepsilon\frac{(z\,e^{i\,2\,\pi})^\alpha}{1+(z\,e^{i\,2\,\pi})^2}\,dz\right\} \\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left\{(1-e^{i\,2\,\pi\,\alpha})\int_\varepsilon^R\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz\right\}=(1-e^{i\,2\,\pi\,\alpha})\int_0^{+\infty}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz
\end{aligned}$$

が得られる．$\sin z=(e^{i\,z}-e^{-i\,z})/(2\,i)$ より

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{z^\alpha}{1+z^2}\,dz &= \frac{\pi\,i^\alpha-\pi\,(-i)^\alpha}{1-e^{i\,2\,\pi\,\alpha}}=\frac{\pi\left(e^{i\,\frac{\pi\,\alpha}{2}}-e^{i\,\frac{3\,\pi\,\alpha}{2}}\right)}{1-e^{i\,2\,\pi\,\alpha}} \\
&= \frac{\pi\left(e^{i\,\frac{\pi\,\alpha}{2}}-e^{-i\,\frac{\pi\,\alpha}{2}}\right)}{e^{i\,\pi\,\alpha}-e^{-i\,\pi\,\alpha}}=\frac{\pi\,\sin\dfrac{\pi\,\alpha}{2}}{\sin\pi\,\alpha}=\frac{\pi}{2\,\cos\dfrac{\pi\,\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

である．■