

■ $X = \mathbb{N}$ における二項関係 $|$ を

$$a|b \iff b \text{ は } a \text{ で整除される}$$

により定義するとき, 二項関係 $|$ は X における順序関係であることを示せ.

(解) (1) $a = 1 \cdot a + 0$ より a は a で整除されるので, $a|a$ である. (2) $a|b$ かつ $b|a$ とする. 二項関係 $|$ の定義より, ある自然数 k_1, k_2 が存在して, $b = k_1 a$ および $a = k_2 b$ が成り立つ. $b = k_1 a = k_1 k_2 b$ と $b \geq 1$ より $k_1 k_2 = 1$ が得られる. k_1 と k_2 は自然数であるから, $k_1 = k_2 = 1$ でなければならない. したがって, $a = b$ である. (3) $a|b$ かつ $b|c$ とする. 二項関係 $|$ の定義より, ある自然数 k_1, k_2 が存在して, $b = k_1 a$ および $c = k_2 b$ が成り立つ. $c = k_2 b = k_2 k_1 a$ と $k_2 k_1 \in \mathbb{N}$ より c は a で整除される, つまり, $a|c$ が成り立つ. 以上から, 二項関係 $|$ は同値関係である. ■