解析学概論　解答例

2016.05.23

■　次の問いに答えよ．

(1) すべての整数 n，k　($0 \leq k < n$) に対して ${}_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$,

　(P) すべての k　($0 \leq k \leq n$) に対して二項係数 ${}_nC_k$ は自然数である

　ことを示せ．

(解) (1) 二項係数の定義より

$$\begin{aligned}{}_{n+1}C_{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot \{(n+1)-(k+1)\}!} = \frac{\{(k+1)+(n-k)\} \cdot n!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{(k+1) \cdot n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-k) \cdot n!}{(k+1)! \cdot (n-k) \cdot \{n-(k+1)\}!} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1}\end{aligned}$$

となる．

(2) [I] 二項係数の定義より ${}_1C_0 = 1$，${}_1C_1 = 1$ であるから，$n = 1$ のとき (P) が成り立つ．[II] $n = \ell$ のとき (P) が成り立つと仮定する．二項係数の定義より ${}_{\ell+1}C_0 = 1$，${}_{\ell+1}C_{\ell+1} = 1$ であるから，${}_{\ell+1}C_0$ および ${}_{\ell+1}C_{\ell+1}$ は自然数である．また，$1 \leq k \leq \ell$ に対して，(1) より

$${}_{\ell+1}C_k = {}_\ell C_{k-1} + {}_\ell C_k$$

であり，帰納法の仮定より ${}_{\ell+1}C_k$ は自然数である．したがって，$n = \ell + 1$ のときも (P) が成り立つ．数学的帰納法より，すべての自然数 n に対して (P) が成り立つ．■