

■ 各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, 写像 $\Phi_n : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ を

(S1) $\Phi_n(0) = n$ であり,

(S2) すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して $\Phi_n(S(m)) = S(\Phi_n(m))$ である

と帰納的に定義するとき, すべての $n, m, \ell \in \mathbb{N}_0$ に対して結合法則 $\Phi_{\Phi_n(m)}(\ell) = \Phi_n(\Phi_m(\ell))$ が成り立つことを示せ.

(解) $n, m \in \mathbb{N}_0$ を任意に取り固定する. (1) $\ell = 0$ のとき,

$$\Phi_{\Phi_n(m)}(0) \stackrel{(S1)}{=} \Phi_n(m) \stackrel{(S1)}{=} \Phi_n(\Phi_m(0))$$

より結合法則が成り立つ. (2) $\ell = k$ のとき結合法則が成り立つと仮定すると,

$$\Phi_{\Phi_n(m)}(S(k)) \stackrel{(S2)}{=} S(\Phi_{\Phi_n(m)}(k)) \stackrel{\text{帰納法の仮定}}{=} S(\Phi_n(\Phi_m(\ell))) \stackrel{(S2)}{=} \Phi_n(S(\Phi_m(\ell))) \stackrel{(S2)}{=} \Phi_n(\Phi_m(S(\ell)))$$

が得られ, $\ell = S(k)$ のときも結合法則が成り立つ. 数学的帰納法により, すべての $n, m, \ell \in \mathbb{N}_0$ に対して結合法則 $\Phi_{\Phi_n(m)}(\ell) = \Phi_n(\Phi_m(\ell))$ が成り立つ. ■