解析学概論　解答例

2016.06.06

■　各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，写像 $\Psi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ を
(M1) $\Psi_n(0) = 0$ であり，
(M2) すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して $\Psi_n(S(m)) = \Psi_n(m) + n$ である
と帰納的に定義するとき，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_n(1) = n = \Psi_1(n)$ が成り立つことを示せ．ここで，写像 S は後継者を対応させるものであり，$1 = S(0)$ とする．

(解)　加法の定義より，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$S(n) \overset{\text{加法の定義 (1)}}{=} S(\Phi_n(0)) \overset{\text{加法の定義 (2)}}{=} \Phi_n(S(0)) \overset{1\ \text{の定義}}{=} \Phi_n(1) = n + 1$$

が成り立つことに注意したい．すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\Psi_n(1) \overset{1\ \text{の定義}}{=} \Psi_n(S(0)) \overset{\text{(M2)}}{=} \Psi_n(0) + n \overset{\text{(M1)}}{=} 0 + n \overset{\text{加法の単位元}}{=} n$$

が成り立つ．また，(a) $n = 0$ のとき

$$\Psi_1(n) = \Psi_1(0) \overset{\text{(M1)}}{=} 0 = n$$

が得られ，(b) $n = k$ のとき $k = \Psi_1(k)$ が成り立つと仮定すると，

$$S(k) = k + 1 \overset{\text{仮定}}{=} \Psi_1(k) + 1 \overset{\text{(M2)}}{=} \Psi_1(S(k))$$

が得られるので，数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $n = \Psi_1(n)$ が成り立つ．■