解析学概論　解答例

2016.06.20

■　$X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ とし，$\mathbb{N}_0$ における加法 $+$ を用いて，X 上の二項関係 $\overset{R}{\sim}$ を

$$(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_2, m_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

により定義するとき，二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は X 上の同値関係である（証明はしなくて良い）．$n < m$ をみたす任意の $(n, m) \in X$ に対して，二項関係 $\overset{R}{\sim}$ に関する (n, m) を代表元とする同値類 $[(n, m)]$ は

$$[(n, m)] = \{\, (k, k + p) \in X \mid k \in \mathbb{N}_0 \,\}$$

と表されることを示せ．ここで，$p \in S(\mathbb{N}_0)$ は $n + p = m$ をみたすものとする．

（解） $A = \{\, (k, k + p) \in X \mid k \in \mathbb{N}_0 \,\}$ とする．(1) 任意に $(x, y) \in [(n, m)]$ を取ると，$(x, y) \overset{R}{\sim} (n, m)$ より $n + (x + p) = x + m = n + y$ であり，簡約法則より $y = x + p$ であるから，$(x, y) = (x, x + p) \in A$ となる．したがって，$[(n, m)] \subset A$ である．(2) 任意に $(x, y) \in A$ を取ると，$y = x + p$ より

$$x + m = x + n + p = n + (x + p) = n + y$$

であるから，$(x, y) \overset{R}{\sim} (n, m)$ となり，$(x, y) \in [(n, m)]$ が得られる．したがって，$A \subset [(n, m)]$ である．以上から，$[(n, m)] = A$ である．■