解析学概論　解答例

2016.07.11

■　次の問に答えよ．

(1) n を自然数とする．n^2 が 2 で整除できるならば，n も 2 で整除できることを示せ．

(2) $\sqrt{2}$ は有理数でないことを示せ．

（解） (1) n が 2 で整除できないと仮定する．ある自然数 m を用いて $n = 2m - 1$ と表せるので，$2m^2 - 2m \in \mathbb{Z}$ より $n^2 = 2(2m^2 - 2m) + 1$ は 2 で整除できない．対偶を取ることにより，n^2 が 2 で整除できるならば，n も 2 で整除できる．

(2) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．このとき，互いに素な（最大公約数が 1 である）自然数 n, m を用いて $\sqrt{2} = n/m$ と表せる．$n^2 = 2m^2$ より n^2 は 2 で整除される．前問題から，ある自然数 ℓ が取れて $n = 2\ell$ と表せるので，$m^2 = 2\ell^2$ となる．同様に，ある自然数 k が取れて $m = 2k$ と表される．以上から，2 は n と m の公約数であり，n と m が互いに素であることに反する．背理法により，$\sqrt{2}$ は有理数ではない．■