解析学 I　解答例

2017.10.10

■　曲線 $x^2 + (y-3)^2 = 2^2$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(解) 与えられた図形は

$$3 - \sqrt{4-x^2} \leq y \leq 3 + \sqrt{4-x^2}, \qquad -2 \leq x \leq 2$$

であるから，変数変換 $x = 2\sin\theta$ を用いると，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V =& \pi \int_{-2}^{2} \left(3 + \sqrt{4-x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-2}^{2} \left(3 - \sqrt{4-x^2}\right)^2 dx = 12\,\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx \\ =& 48\,\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = 48\,\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\,\theta}{2}\, d\theta = 48\,\pi \left[\frac{2\,\theta + \sin 2\,\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 24\,\pi^2 \end{aligned}$$

である．■