

解析学 I 解答例

2017.10.16

■ 集合 X における同値関係 \sim^R が与えられ, その同値関係に関する a を代表元とする同値類を $C(a)$ と表すとき, 次が成り立つことを示せ.

$$(1) a \sim^R b \iff C(a) = C(b)$$

$$(2) a \not\sim^R b \iff C(a) \cap C(b) = \emptyset$$

(解) (1): (\implies) 任意の $x \in C(a)$ [$x \in C(b)$] に対して, $x \sim^R a$ [$x \sim^R b$] と $a \sim^R b$ より $x \sim^R b$ [$x \sim^R a$] が得られるので, $x \in C(b)$ [$x \in C(a)$] となる. したがって, $C(a) \subset C(b)$ および $C(b) \subset C(a)$ が成り立つので, $C(a) = C(b)$ である. (\impliedby) $a \in C(a) = C(b)$ より $a \sim^R b$ である.

(2): (\implies) $a \not\sim^R b$ かつ $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ と仮定する. $x \in C(a) \cap C(b)$ が取れ, $x \sim^R a$ かつ $x \sim^R b$ が成り立つので, $a \sim^R b$ となり, これは仮定に反する. したがって, $a \not\sim^R b$ ならば $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ である. (\impliedby) $a \sim^R b$ ならば, $a \in C(a) = C(b)$ より $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ である. 対偶を取ることで, $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ ならば $a \not\sim^R b$ である. ■