解析学 I　解答例

2017.10.23

■　a を有理数とし，数列 (a_n) を

$$a_n = a + 2^{-n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，(a_n) は基本列であることを示せ．

(解)　数列 (a_n) は任意の自然数 n，m に対して，$\ell = \min(n, m)$ とおくと，$\ell \leq n$，$\ell \leq m$ であるから，

$$\begin{aligned} |\, a_n - a_m \,| =& |\,(a + 2^{-n}) - (a + 2^{-m})\,| = |\,2^{-n} - 2^{-m}\,| \\ =& 2^{-\ell}\,|\,2^{\ell-n} - 2^{\ell-m}\,| \leq 2^{-\ell}\,(2^{\ell-n} + 2^{\ell-m}) \leq 2^{-\ell} \cdot (1+1) = 2^{1-\ell} \end{aligned}$$

が成り立つ．また，x を超えない最大の整数を $[x]$ と表すと，$[x] \leq x < [x] + 1$ であることに注意したい．任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，

$$n_0 = \left[\log_2 \frac{2}{\min(\varepsilon, 1)}\right] + 1$$

とおくと，$2^{1-n_0} < \min(\varepsilon, 1) \leq \varepsilon$ が成り立つので，任意の自然数 n，$m \geq n_0$ に対して，$\ell = \min(n, m) \geq n_0$ より

$$|\, a_n - a_m \,| \leq 2^{1-\ell} \leq 2^{1-n_0} < \varepsilon$$

となる．したがって，命題

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Longrightarrow |\, a_n - a_m \,| < \varepsilon$$

が成り立つので，数列 (a_n) は基本列である．■