解析学 I　解答例

2017.10.30

■　有理数の集合 $\mathbb{Q}$ における基本列全体を X とし，その上の二項関係 $\sim$ を次のように定義する．

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} |\, a_n - b_n \,| = 0$$

このとき，二項関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ．

(解)　任意の (a_n)，$(b_n) \in X$ に対して，

$$|\, a_n - a_n \,| = 0, \qquad |\, a_n - b_n \,| = |\, b_n - a_n \,|, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が成り立つので，$(a_n) \sim (a_n)$ であり，$(a_n) \sim (b_n)$ ならば $(b_n) \sim (a_n)$ となる．$(a_n) \sim (b_n)$ かつ $(b_n) \sim (c_n)$ であると仮定する．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．二項関係 $\sim$ の定義より，

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Longrightarrow |\, a_n - b_n \,| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Longrightarrow |\, b_n - c_n \,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．$n_0 = \max(n_1, n_2)$ とおくと，すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$|\, a_n - c_n \,| = |\, (a_n - b_n) + (b_n - c_n) \,| \leq |\, a_n - b_n \,| + |\, b_n - c_n \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり，二項関係 $\sim$ の定義より $(a_n) \sim (c_n)$ が得られる．したがって，二項関係 $\sim$ は同値関係である．■