解析学 I　解答例

2017.11.06

■　$f(0)=0$ であり，すべての $x>0$ に対して $f(x)>0>f''(x)$ をみたす 2 階連続微分可能な関数 $f(x)$ は，すべての $x>0$ に対して $f'(x)>0$ であるかどうか調べよ．

（解） 微分積分学の基本定理より，すべての $x>\alpha\geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} f'(x) =& f'(\alpha)+\int_\alpha^x f''(t)\,dt, \\ f(x) =& f(a)+\int_\alpha^x f'(s)\,ds = f(a)+f'(\alpha)\,(x-\alpha)+\int_\alpha^x\int_\alpha^s f''(t)\,dt\,ds \end{aligned}$$

が成り立つことに注意したい．$f'(0)\leq 0$ ならば，$x>0$ に対して

$$f(x)=f'(0)\,x+\int_0^x\int_0^s f''(t)\,dt\,ds<0$$

となり，矛盾である．したがって，$f'(0)>0$ でなければならない．

ある $a>0$ に対して $f'(a)=0$ と仮定する．このとき，

$$f'(a+1)=\int_a^{a+1} f''(x)\,dx<0$$

である．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a+1,f(a+1))$ における接線の方程式

$$y=f'(a+1)\,\{x-(a+1)\}+f(a+1)$$

を用いて，関数 $g(x)$ を

$$g(x)=f'(a+1)\,\{x-(a+1)\}+f(a+1)-f(x)$$

により定義すると，すべての $x>0$ に対して

$$g'(x)=f'(a+1)-f'(x), \qquad g''(x)=-f''(x)>0$$

が成り立つ．$g'(a+1)=0$ であり，$g'(x)$ は $x>0$ において単調増加関数であるから，$g(x)$ は $0<x<a+1$ において単調減少，$x>a+1$ において単調増加である，つまり，$x\geq 0$ における $g(x)$ の最小値は $x=a+1$ において取る．$g(a+1)=0$ より，すべての $x\geq 0$ に対して $g(x)\geq 0$ である．ここで，

$$\gamma=a+1-\frac{f(a+1)}{f'(a+1)}\ (>a+1)$$

とおくと，

$$0\leq g(\gamma)=-f(\gamma)<0$$

となり，矛盾である．したがって，すべての $x>0$ に対して $f'(x)>0$ である．■