解析学 I　解答例

2017.11.20

■　$p > 1$ を与えて，

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

により q を定めるとき，すべての x，$y \geq 0$ に対して

$$x\,y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

が成り立つことを示せ．

（解）p，q は

$$q = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} > 1, \qquad (q-1)\,p = \frac{p}{p-1} = q$$

をみたすことに注意したい．また，$x\,y = 0$ のときには，示すべき不等式は明らかに成り立つので，以下では $x > 0$，$y > 0$ の場合を考える．

（解答１）$y > 0$ を任意に取り固定する．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - x\,y$$

により定義すると，

$$f'(x) = x^{p-1} - y \begin{cases} < 0 & (0 < x < y^{q-1}) \\ = 0 & (x = y^{q-1}) \\ > 0 & (x > y^{q-1}) \end{cases}$$

より，$x \geq 0$ の範囲において $f(x)$ は $x = y^{q-1}$ で最小値を取る．

$$f(y^{q-1}) = \frac{\left(y^{q-1}\right)^p}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{q-1} \cdot y = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) y^q = 0$$

より，すべての x，$y \geq 0$ に対して

$$x\,y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

が成り立つ．

（解答２）$f(x) = x^{p-1}$ とおくと，$y = f(x)$ の逆関数 $x = g(y)$ は $g(y) = y^{1/(p-1)} = y^{q-1}$ であるから，

$$x\,y \leq \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y g(t)\,dt = \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x + \left[\frac{t^q}{q}\right]_0^y = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

が成り立つ．■