解析学 I　解答例

2017.11.27

■　次の問いに答えよ．

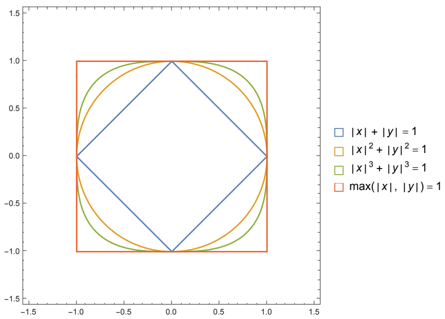
(1) $\mathbf{x} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ とする．xy 平面上に $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$，$\|\mathbf{x}\|_2 = 1$，$\|\mathbf{x}\|_3 = 1$，$\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ をみたす図形を図示せよ．

(2) すべての $x > 0$，$y > 0$，$t \in [0, 1]$ に対して，不等式

$$\log(t\,x + (1-t)\,y) \geq t\,\log x + (1-t)\,\log y \tag{E}$$

が成り立つかどうか調べよ．

（解） (1)： $\|\mathbf{x}\|_p = 1$ （$1 \leq p < +\infty$）は $|\,x\,|^p + |\,y\,|^p = 1$ と表され，$\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ は $\max(|\,x\,|, |\,y\,|) = 1$ と表されることに注意すると，図形 $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$，$\|\mathbf{x}\|_2 = 1$，$\|\mathbf{x}\|_3 = 1$，$\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ は下図のようになる．



(2)： $x = y$ の場合，および，$t = 0$ または $t = 1$ の場合には，不等式 (E) は明らかに成り立つ．また，x と y の役割を入れ替えることにより同様に示せるので，$x < y$ かつ $t \in (0, 1)$ の場合について示せば良い．$z = t\,x + (1-t)\,y \in (x, y)$ とおく．$[\log x]' = 1/x$ と平均値の定理より，$w_1 \in (x, z)$ と $w_2 \in (z, y)$ が取れて，

$$\frac{\log z - \log x}{(1-t)\,(y-x)} = \frac{\log z - \log x}{z - x} = \frac{1}{w_1} > \frac{1}{w_2} = \frac{\log y - \log z}{y - z} = \frac{\log y - \log z}{t\,(y-x)}$$

が成り立つので，両辺に $t\,(1-t)\,(y-x)$ をかけると，

$$t\,(\log z - \log x) > (1-t)\,(\log y - \log z)$$

が得られ，不等式 (E) が成り立つ．■