解析学 I　解答例

2017.12.04

■　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad b_n = 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，数列 $\{a_n\}$ と $\{a_n \cdot b_n\}$ は基本列であることを示せ．

（解）　任意の自然数 n，m に対して $|a_n| < 2$，$|b_n| < 3$，

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^m \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^m \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\min(n,m)} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\min(n,m)}, \\ |b_n - b_m| &= \left| \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^m \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^m \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\min(n,m)} \end{aligned}$$

が成り立つことに注意したい．任意に $\varepsilon > 0$ を取る．不等式

$$n > \frac{\log 20 - \log \varepsilon}{\log 3 - \log 2}$$

をみたす最小の自然数 n_0 を取ることができ，

$$10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．このとき，任意の自然数 n，$m \geq n_0$ に対して

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\min(n,m)} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon, \\ |(a_n \cdot b_n) - (a_m \cdot b_m)| &= |(a_n - a_m)\, b_n + a_m\, (b_n - b_m)| \leq |a_n - a_m||b_n| + |a_m||b_n - b_m| \\ &\leq \left\{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\min(n,m)}\right\} \cdot 3 + 2 \cdot \left\{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\min(n,m)}\right\} = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

が得られる．したがって，数列 $\{a_n\}$ と $\{a_n \cdot b_n\}$ は基本列である．■