解析学 I　解答例

2017.12.11

■　$\mathbb{Q}$ における基本列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がそれぞれ a，b に収束すれば，数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$ はそれぞれ $a+b$，$a\cdot b$ に収束することを示せ．

（解） $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は基本列であるから，ある $M_1>0$，$M_2>0$ が取れて，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $|a_n|\le M_1$，$|b_n|\le M_2$ が成り立つ．ここで，

$$M=\max(M_1,M_2,|a|,|b|,1)$$

とおくと，$M\ge 1$ であり，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $|a_n|\le M$，$|b_n|\le M$ となる．

任意に $\varepsilon>0$ を取る．$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がそれぞれ a，b に収束するので，

$$\exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N} : n\ge n_1 \Longrightarrow |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M};$$
$$\exists n_2\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N} : n\ge n_2 \Longrightarrow |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

が成り立つので，$n_0=\max(n_1,n_2)$ とおくと，すべての自然数 $n\ge n_0$ に対して

$$\begin{aligned}
|(a_n+b_n)-(a+b)| &\le |a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}=\frac{\varepsilon}{M}\le\varepsilon,\\
|(a_n\cdot b_n)-(a\cdot b)| &= |(a_n-a)\,b_n-a\,(b_n-b)|\\
&\le |a_n-a|\,|b_n|+|a|\,|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon
\end{aligned}$$

となる．したがって，数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$ はそれぞれ $a+b$，$a\cdot b$ に収束する．■