解析学 I　解答例

2017.12.19

■　$n \geq 4$ を自然数とする．n 個のビーカーがあり，それらにはそれぞれ x_1 L，x_2 L，x_3 L，$\cdots$，x_n L の水が入っており，条件

$$x_1 > x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

をみたしているとする．これらのビーカーに対して，次の操作をビーカーが 1 個になるまで繰り返す．

水量が最も少ないビーカー 2 個を選び，一方の水全部を他方に移し，空になったビーカーを捨てる．

このとき，$x_1 > 2/5$ の場合について，ビーカーが 2 個になったとき，水量が最初 x_1 L であるビーカーの水量はどのようになっているかを調べよ．

(解)　ビーカーが k （$k \geq 4$）個になったとき，水量が最も少ない 2 つをまとめた水量が初めて x_1 L 以上になったと仮定する．このとき，x_1 L 以外の水量を q_2 L，q_3 L，$\cdots$，q_k L と表すと，

$$q_{k-1} + q_k \geq x_1 > q_2 \geq q_3 \geq \cdots \geq q_{k-1} \geq q_k > 0, \qquad x_1 + \sum_{j=2}^{k} q_k = 1$$

が成り立つので，

$$\frac{2}{5} < x_1 \leq q_{k-1} + q_k \leq 2\,p_{k-1}, \qquad \text{つまり，} \quad \frac{1}{5} < p_{k-1} \leq p_j \quad (j = 2, 3, \cdots, k-2)$$

より

$$1 = x_1 + \sum_{j=2}^{k-2} p_j + (p_{k-1} + p_k) > \frac{2}{5} + \sum_{k=2}^{k-2} \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{k+1}{5} \geq 1$$

となり，矛盾である．したがって，4 個になるまでに，水量が最も少ない 2 つをまとめた水量が x_1 L 以上になることはない．ここで，4 個になったとき，x_1 L 以外の水量を r_2 L，r_3 L，r_4 L と表すと，

$$x_1 > r_2 \geq r_3 \geq r_4 > 0, \qquad x_1 > r_3 + r_4$$

が成り立つので，まず水量が r_3 L と r_4 L のビーカーがまとめられ，次に水量が r_2 L と $(r_3 + r_4)$ L のビーカーがまとめられ，ビーカーが 2 個になったとき，水量が x_1 L と $(r_2 + r_3 + r_4)$ L のビーカーが残っている．したがって，ビーカーが 2 個になるまで，水量が最初 x_1 L のビーカーの水量は変化しない．■