解析学 I　解答例

2018.01.15

■　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq \gamma_n < 1$ をみたす数列 $\{\gamma_n\}$ と定数 α を与えて，数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = \alpha; \qquad x_{n+1} = \gamma_n\, x_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，$\{x_n\}$ が 0 に収束しない例を示せ．

（解）数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義すると，$\alpha = x_1 = 2$ であり，

$$0 \leq \gamma_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n\,(n+2)}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

である．

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$$

より，上記の α，$\{\gamma_n\}$，$\{x_n\}$ が求める例の一つである．■